

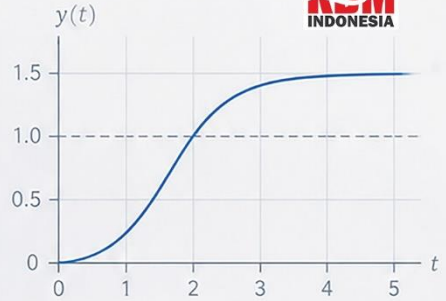
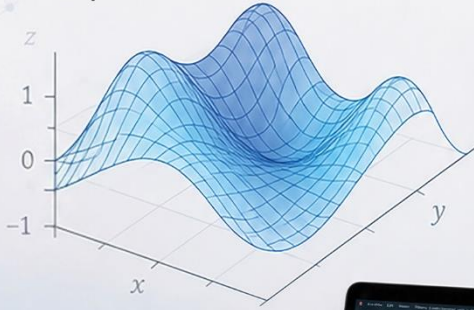
$$y(t) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = u(t)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

Faisol, M.Si.

KBM
INDONESIA



PEMODELAN MATEMATIKA

TEORI, ANALISIS, SIMULASI, DAN APLIKASI

Dilengkapi dengan Contoh Terapan, Studi Kasus,
Implementasi Python/MATLAB, dan Latihan Soal Berjenjang

PEMODELAN MATEMATIKA

Teori, Analisis, Simulasi, Dan Aplikasi

**Dilengkapi dengan Contoh Terapan, Studi Kasus,
Implementasi Python/MATLAB, dan Latihan Soal Berjenjang**

**Penulis
Faisol, M.Si.**



PENERBIT KBM INDONESIA

adalah penerbit dengan misi memudahkan proses penerbitan buku-buku penulis di tanah air Indonesia, serta menjadi media *sharing* proses penerbitan buku.

PEMODELAN MATEMATIKA
Teori, Analisis, Simulasi, dan Aplikasi

Copyright @ 2026 By Faisol, M.Si.

All right reserved

Penulis

Faisol, M.Si.

Desain Sampul

Eca Art

Tata Letak

Husnud Diniyah

Editor

Zeinal Abidin, S.Pd.

Background isi buku di ambil dari <https://www.freepik.com/>

Official

Depok, Sleman-Jogjakarta (Kantor)

Penerbit Karya Bakti Makmur (KBM) Indonesia

Anggota IKAPI/No. IKAPI 279/JTI/2021

081357517526 (Tlpn/WA)

Website

<https://penerbitkbm.com>

www.penerbitbukumurah.com

Penjualan Buku

Website: <https://penerbitkbm.com/toko-buku/>

Shopee: @penerbitKBM

Youtube

@PenerbitKBMOfficial

Tiktok

@penerbitkbm

Email

naskah@penerbitkbm.com

ISBN: 978-634-278-477-8

Cetakan ke-1, Juni 2026

15,5 x 23 cm, xii + 234 halaman

Isi buku diluar tanggungjawab penerbit
Hak cipta merek KBM Indonesia sudah terdaftar di DJKI-Kemenkumham
dan isi buku dilindungi undang-undang.

Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau
memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
tanpa seizin penerbit karena beresiko sengketa hukum

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

Undang-Undang No. 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta

- i. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 100. 000. 000 (seratus juta rupiah).
- ii. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 500. 000. 000,00 (lima ratus juta rupiah).
- iii. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 1. 000. 000. 000,00 (satu miliar rupiah).
- iv. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 4. 000. 000. 000,00 (empat miliar rupiah).

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan : EC002026088092, 15 Juni 2026

Pencipta

Nama : **Faisol, M.Si.**
Alamat : Dusun Tacempah Desa Plakpak, Pegantenan, Kab. Pamekasan, Jawa Timur, 69361
Kewarganegaraan : Indonesia

Pemegang Hak Cipta

Nama : **Faisol, M.Si.**
Alamat : Dusun Tacempah Desa Plakpak, Pegantenan, Kab. Pamekasan, Jawa Timur, 69361
Kewarganegaraan : Indonesia

Jenis Ciptaan : **Buku**
Judul Ciptaan : **PEMODELAN MATEMATIKA : Teori, Analisis, Simulasi, dan Aplikasi**

Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia : 15 Juni 2026, di Kota Adm. Jakarta Pusat

Jangka waktu pelindungan : Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.

Nomor Pencatatan : 001284271

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.

Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.



a.n. MENTERI HUKUM
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL
u.b.
Direktur Hak Cipta dan Desain Industri

Agung Damarsasongko,SH.,MH.
NIP. 196912261994031001



Disclaimer:

1. Dalam hal pemohon memberikan keterangan tidak sesuai dengan surat pernyataan, Menteri berwenang untuk mencabut surat pencatatan permohonan.
2. Surat Pencatatan ini telah disegel secara elektronik menggunakan segel elektronik yang diterbitkan oleh Balai Besar Sertifikasi Elektronik, Badan Siber dan Sandi Negara.
3. Surat Pencatatan ini dapat dibuktikan keasliannya dengan memindai kode QR pada dokumen ini dan informasi akan ditampilkan dalam browser.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga buku ajar *Pemodelan Matematika: Teori, Analisis, Simulasi, dan Aplikasi* ini dapat diselesaikan. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat, dan seluruh umat yang mengikuti jalannya.

Buku ajar ini lahir dari kebutuhan nyata di lapangan: tersedianya sumber belajar yang tidak hanya memuat teori dan rumus, tetapi juga menunjukkan kepada mahasiswa bagaimana matematika benar-benar bekerja untuk memahami dunia. Pemodelan matematika adalah jembatan antara abstraksi matematika yang indah dengan kompleksitas fenomena alam, biologi, ekonomi, dan kehidupan sosial yang kita hadapi setiap hari. Buku ini mencoba membangun jembatan tersebut secara sistematis dan terstruktur.

Gagasan menulis buku ini berawal dari pengalaman mengampu mata kuliah *Pemodelan Matematika* di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Islam Madura. Dalam pengalaman tersebut, penulis merasakan bahwa mahasiswa sering kesulitan menghubungkan konsep teoretis — persamaan diferensial, analisis kestabilan, metode numerik — dengan pertanyaan-pertanyaan nyata yang mereka ingin jawab. Buku ajar ini berusaha menjembatani kesenjangan itu dengan pendekatan yang konsisten: setiap konsep diperkenalkan melalui motivasi nyata,



dikembangkan secara matematis yang ketat, dan diakhiri dengan contoh terapan serta implementasi komputasi.

Sembilan bab dalam buku ini dirancang untuk mengikuti siklus penuh pemodelan matematika yang ilmiah. Dimulai dari fondasi konseptual (Bab 1: Pengantar Pemodelan), penulis membangun model-model klasik secara bertahap: model pertumbuhan populasi Malthus dan logistik (Bab 2), model epidemiologi SIR (Bab 3), dan model predator-prey Lotka-Volterra (Bab 5). Analisis kestabilan model (Bab 4) memberikan fondasi analitik untuk memahami perilaku jangka panjang model. Metode numerik (Bab 6) dan simulasi komputasi beserta analisis sensitivitas (Bab 7) membekali mahasiswa dengan alat komputasi modern. Rekonstruksi dan validasi model (Bab 8) mengajarkan cara mengevaluasi dan memperbaiki model secara ilmiah. Akhirnya, komunikasi ilmiah (Bab 9) mempersiapkan mahasiswa untuk mengkomunikasikan hasil kerja mereka secara profesional.

Setiap bab dilengkapi dengan capaian pembelajaran yang spesifik dan terukur, mengacu pada Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL) Program Studi Matematika FMIPA UIM dan Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK) yang telah ditetapkan. Penyusunan ini mengacu pada Kerangka Kualifikasi Nasional Indonesia (KKNI) Level 6 dan Standar Nasional Pendidikan Tinggi (SN-Dikti) sebagaimana diatur dalam Permendikbud No. 3 Tahun 2020.

Keistimewaan buku ini dibandingkan referensi konvensional adalah penekanan pada implementasi komputasi. Setiap model diimplementasikan dalam kode Python dan MATLAB yang lengkap dan siap-pakai, sehingga mahasiswa dapat langsung bereksperimen dengan model. Filosofi yang dianut adalah: pemahaman yang sesungguhnya datang ketika Anda dapat membuat komputer ‘berbicara’ melalui model yang Anda bangun.



Buku ini juga menekankan aspek yang sering diabaikan dalam buku teks pemodelan: validasi model, analisis sensitivitas, dan rekonstruksi model. Dalam praktik ilmiah yang sesungguhnya, kemampuan untuk mengenali kapan model perlu diperbaiki dan bagaimana cara memperbaikinya adalah keterampilan yang sama pentingnya dengan kemampuan membangun model dari awal. Penulis berharap bab-bab ini dapat membangun kesadaran kritis mahasiswa terhadap asumsi dan keterbatasan model yang mereka gunakan.

Penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam penyelesaian buku ajar ini. Terima kasih kepada pimpinan Universitas Islam Madura, dan rekan-rekan sejawat di Program Studi Matematika FMIPA UIM yang telah memberikan masukan dan saran konstruktif, penulis mengucapkan terima kasih yang tulus. Kepada mahasiswa-mahasiswa Program Studi Matematika FMIPA UIM yang pertanyaan dan keingintahuannya menjadi inspirasi utama penulisan buku ini, terima kasih.

Kepada keluarga tercinta yang selalu memberikan dukungan moral dan semangat tanpa henti dalam setiap langkah penyelesaian buku ini, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa buku ajar ini masih jauh dari sempurna. Ilmu pengetahuan terus berkembang, dan pemodelan matematika adalah salah satu bidang yang berkembang paling pesat di era modern ini. Oleh karena itu, saran, kritik, dan masukan yang membangun dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan di edisi mendatang. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat nyata bagi mahasiswa, dosen, peneliti, dan semua pihak yang ingin memahami dan menerapkan pemodelan matematika dalam berbagai bidang.

Akhir kata, semoga Allah SWT meridhai usaha ini dan menjadikannya amal ilmu yang bermanfaat. آمين يا رب العالمين.







CAKUPAN MATERI

Disusun dalam sembilan bab yang kohesif dan saling mendukung, buku ini mengikuti siklus penuh pemodelan matematika dari awal hingga akhir:

Bab	Topik	Isi Utama
Bab 1	Pengantar Pemodelan Matematika	Definisi, siklus pemodelan, klasifikasi model, variabel & parameter, asumsi, keterbatasan model.
Bab 2	Model Pertumbuhan Populasi	Model Malthus, model logistik, MSY, Efek Allee, perluasan model, aplikasi pada populasi nyata.
Bab 3	Model Epidemiologi SIR	Kompartemen S-I-R, R_0 , herd immunity, final size, perluasan SEIR/SIRS/SIS, studi kasus COVID-19.
Bab 4	Analisis Kestabilan Model	Titik ekuilibrium, linearisasi, matriks Jacobian, klasifikasi titik kritis, Lyapunov, bifurkasi.
Bab 5	Model Predator-Prey Lotka-Volterra	Penurunan model, center, invariant pertama, periode osilasi, Paradoks Volterra, perluasan model.
Bab 6	Metode Numerik	Metode Euler, Heun, Runge-Kutta orde 4, analisis galat, stabilitas, implementasi Python/MATLAB.



Bab	Topik	Isi Utama
Bab 7	Simulasi Komputasi & Sensitivitas	Simulasi skenario, NSI, PRCC, LHS, tornado chart, heatmap 2-parameter, model SEIR-V.
Bab 8	Rekonstruksi & Validasi Model	Verifikasi, ukuran fit (RMSE/R ² /AIC), residual, SIR→SEIR, cross-validation, overfitting.
Bab 9	Komunikasi Ilmiah	Struktur IMRaD, konvensi matematis, sitasi APA/IEEE, etika akademik, presentasi, rubrik penilaian.

Keunggulan Buku

 Pendekatan Terintegrasi Teori matematis yang ketat dipadukan dengan implementasi komputasi langsung. Setiap konsep dilengkapi kode Python dan MATLAB yang siap dijalankan.  Berbasis Data Nyata Studi kasus menggunakan data dan konteks nyata: wabah COVID-19, populasi lynx-hare Kanada, penduduk Indonesia, dan siklus Yellowstone.  Berorientasi Capaian Setiap bab dimulai dengan capaian pembelajaran yang terukur, sesuai CPL Prodi dan CPMK yang telah ditetapkan dalam RPS.	 Lengkap dan Mendalam Dilengkapi contoh terapan (3 per bab), latihan soal berjenjang (8–10 per bab), rangkuman, dan referensi terkurasi dari jurnal dan buku terkemuka.  Lintas Disiplin Aplikasi pemodelan pada biologi, epidemiologi, ekologi, manajemen sumber daya, kebijakan kesehatan publik, dan dinamika sosial-ekonomi.  Sesuai Kurikulum UIM Disusun berdasarkan RPS resmi Mata Kuliah Pemodelan Matematika FMIPA UIM, selaras dengan KKNi Level 6 dan SN-Dikti.
---	--



Sasaran Pembaca

Buku ini ditujukan untuk:

Mahasiswa Utama:

Mahasiswa Program Studi Matematika, Statistika, Fisika, Biologi, dan program studi sains terapan lainnya pada jenjang S1, terutama yang sedang mengambil mata kuliah Pemodelan Matematika, Matematika Terapan, atau Persamaan Diferensial.

Pendidik:

Dosen pengampu mata kuliah Pemodelan Matematika, Persamaan Diferensial, Analisis Numerik, atau Matematika Biologi yang memerlukan referensi yang komprehensif dan terkini dengan pendekatan komputasi modern.

Peneliti dan Praktisi:

Peneliti muda, epidemiolog, ekolog, dan praktisi di bidang kesehatan masyarakat, lingkungan hidup, atau manajemen sumber daya yang ingin menerapkan pemodelan matematika dalam pekerjaan mereka.





DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
CAKUPAN MATERI	v
DAFTAR ISI	ix
BAB 1. PENGANTAR PEMODELAN MATEMATIKA	1
1.1 Pengantar dan Motivasi	1
1.2 Definisi Pemodelan Matematika	2
1.3 Tahapan Proses Pemodelan Matematika	5
1.4 Klasifikasi Model Matematika	8
1.5 Variabel, Parameter, dan Asumsi dalam Pemodelan	12
1.6 Hubungan Pemodelan Matematika dengan Cabang Matematika Lain	15
1.7 Contoh Lengkap: Membangun Model dari Awal	16
1.8 Keterbatasan Model Matematika	17
BAB 2. MODEL PERTUMBUHAN POPULASI	21
2.1 Pengantar: Dinamika Populasi dan Pemodelannya	21
2.2 Model Malthus: Pertumbuhan Eksponensial	22
2.3 Model Logistik: Pertumbuhan dengan Batas Lingkungan	27
2.4 Perbandingan Model Malthus dan Model Logistik	33
2.5 Variasi dan Perluasan Model Pertumbuhan	35
2.6 Aplikasi Nyata dan Studi Kasus	37
2.7 Keterbatasan Model dan Langkah Selanjutnya	40
BAB 3. MODEL EPIDEMIOLOGI SIR	43
3.1 Pengantar: Epidemiologi dan Pemodelan Matematika	43



3.2	Pemodelan Berbasis Kompartemen	45
3.3	Penyusunan Sistem Persamaan Diferensial SIR.....	47
3.4	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	50
3.5	Analisis Kualitatif Model SIR.....	55
3.6	Analisis Fase dan Relasi Antarvariabel	58
3.7	Contoh Lengkap: Pemodelan Wabah Influenza	59
3.8	Perluasan dan Varian Model SIR.....	62
3.9	Studi Kasus: Pemodelan Pandemi COVID-19	65
BAB 4.	ANALISIS KESTABILAN MODEL.....	69
4.1	Pengantar: Mengapa Analisis Kestabilan Penting?	69
4.2	Konsep Dasar: Sistem Dinamik Otonom.....	71
4.3	Linearisasi dan Matriks Jacobian.....	73
4.4	Klasifikasi Titik Kritis Berdasarkan Nilai Eigen.....	75
4.5	Diagram Fase dan Analisis Kualitatif	79
4.6	Penerapan: Analisis Kestabilan Model Logistik.....	80
4.7	Penerapan: Analisis Sistem Dua Dimensi	81
4.8	Analisis Kestabilan Model SIR.....	83
4.9	Analisis Kestabilan Model SIRS dengan Endemik Ekuilibrium.....	85
4.10	Keterbatasan Linearisasi dan Analisis Nonlinear	87
4.11	Bifurkasi: Perubahan Kualitatif Akibat Perubahan Parameter	89
BAB 5.	MODEL PREDATOR-PREY LOTKA-VOLTERRA	93
5.1	Pengantar: Interaksi Predator-Prey dalam Ekologi	94
5.2	Penyusunan Model Lotka-Volterra.....	96
5.3	Analisis Titik Ekuilibrium	99
5.4	Invariant Pertama: Integral Gerak Model Lotka-Volterra	101
5.5	Diagram Fase dan Analisis Kualitatif	104
5.6	Kelemahan Model Lotka-Volterra Klasik dan Perluasannya	107
5.7	Data Empiris: Siklus Lynx-Hare di Kanada.....	110



5.8	Implementasi Numerik dan Visualisasi	111
5.9	Aplikasi dan Implikasi untuk Manajemen Ekosistem.....	114
BAB 6. METODE NUMERIK UNTUK PEMODELAN		
MATEMATIKA		119
6.1	Pengantar: Mengapa Metode Numerik Diperlukan?	120
6.2	Formulasi Masalah Nilai Awal (<i>Initial Value Problem</i> / IVP).....	121
6.3	Metode Euler	122
6.4	Metode Euler yang Dimodifikasi: Metode Heun	126
6.5	Metode Runge-Kutta Orde 4 (RK4).....	126
6.6	Perbandingan Komprehensif: Euler vs RK4	130
6.7	Penerapan pada Sistem Persamaan Diferensial: Model SIR	132
6.8	Panduan Memilih Ukuran Langkah h	135
6.9	Implementasi di MATLAB	137
6.10	Panduan Praktikum: Implementasi Terstruktur	138
BAB 7.SIMULASI KOMPUTASI DAN ANALISIS		
SENSITIVITAS		145
7.1	Pengantar: Dari Model Matematika ke Wawasan Praktis.....	146
7.2	Simulasi Komputasi: Prinsip dan Praktik	147
7.3	Analisis Sensitivitas: Konsep Dasar	150
7.4	Indeks Sensitivitas Dinormalisasi (<i>Normalized Sensitivity</i> <i>Index</i>).....	151
7.5	Analisis Sensitivitas Satu Parameter	154
7.6	Analisis Sensitivitas Multi-Parameter.....	157
7.7	Analisis Sensitivitas Global: <i>Latin Hypercube Sampling</i> dan PRCC	161
7.8	Analisis Sensitivitas Dua Parameter: Heatmap	164
7.9	Analisis Sensitivitas Model Lotka-Volterra	167
7.10	Studi Kasus: Panduan Simulasi Lengkap Model SEIR-V	168



BAB 8. REKONSTRUKSI DAN VALIDASI MODEL	175
8.1 Pengantar: Siklus Pemodelan dan Pentingnya Validasi ..	176
8.2 Validasi vs. Verifikasi: Dua Konsep yang Berbeda.....	176
8.3 Ukuran Kebaikan Model (<i>Goodness of Fit</i>)	178
8.4 Analisis Residual	181
8.5 Identifikasi Kelemahan dan Keterbatasan Model	183
8.6 Strategi Rekonstruksi Model	184
8.7 Studi Kasus Lengkap: Rekonstruksi SIR → SEIR.....	186
8.8 Studi Kasus: Rekonstruksi Model Pertumbuhan Populasi.....	193
8.9 Overfitting dan Underfitting: Dua Bahaya dalam Rekonstruksi.....	195
8.10 Validasi Silang (<i>Cross-Validation</i>)	197
8.11 Dokumentasi dan Pelaporan Rekonstruksi Model	199
 BAB 9. KOMUNIKASI ILMIAH HASIL PEMODELAN MATEMATIKA	 205
9.1 Pengantar: Mengapa Komunikasi Ilmiah adalah Bagian dari Ilmu Pengetahuan.....	206
9.2 Struktur Laporan Ilmiah: Format IMRaD	206
9.3 Panduan Menulis Setiap Bagian Laporan	208
9.4 Konvensi Penulisan Matematis	212
9.5 Sitasi dan Daftar Pustaka.....	214
9.6 Presentasi Ilmiah Hasil Pemodelan Matematika	217
9.7 Contoh Outline Lengkap: Laporan Proyek Akhir Pemodelan	221
9.8 Rubrik Penilaian Laporan dan Presentasi	223
9.9 Etika Akademik dalam Penulisan Ilmiah.....	226
 DAFTAR PUSTAKA	 231
PROFIL PENULIS.....	233





BAB 1.

PENGANTAR PEMODELAN MATEMATIKA

 CPMK-1: Konsep dan Prinsip Dasar
Pemodelan

 Pertemuan 1 – 2 (2 ×
3 × 50 mnt)

Capaian Pembelajaran Bab 1

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan definisi, sejarah singkat, dan tujuan pemodelan matematika.
2. Menguraikan tahapan proses pemodelan secara sistematis dan memberikan contoh.
3. Mengklasifikasikan model matematika berdasarkan sifat, skala waktu, dan strukturnya.
4. Mengidentifikasi dan menentukan variabel, parameter, dan asumsi dalam suatu model.
5. 5. Mengevaluasi ketepatan asumsi dan keterbatasan suatu model matematika.

1.1 Pengantar dan Motivasi

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering dihadapkan pada pertanyaan-pertanyaan kompleks: Mengapa wabah penyakit tertentu bisa menyebar begitu cepat? Bagaimana populasi rusa dan serigala saling mempengaruhi di alam liar? Kapan dan seberapa besar banjir akan melanda suatu daerah? Berapa harga saham suatu



perusahaan bulan depan? Pertanyaan-pertanyaan ini tampak sangat berbeda satu sama lain, namun semuanya dapat didekati dengan satu alat yang kuat: pemodelan matematika.

Pemodelan matematika adalah jembatan antara dunia nyata yang kompleks dengan bahasa matematika yang presisi. Melalui pemodelan, kita tidak perlu menunggu wabah penyakit terjadi untuk memahami penyebarannya, cukup dengan membangun model yang tepat, mensimulasikannya, dan menganalisis hasilnya. Inilah yang membuat pemodelan matematika menjadi salah satu cabang matematika terapan yang paling relevan dan berkembang pesat di abad ke-21.

Bab ini akan membangun fondasi pemahaman Anda tentang apa itu pemodelan matematika, mengapa ia penting, bagaimana prosesnya, dan apa saja jenis-jenis model yang ada. Fondasi ini akan menjadi bekal untuk mempelajari model-model spesifik di bab-bab selanjutnya.

1.2 Definisi Pemodelan Matematika

Sebelum mendefinisikan pemodelan matematika, ada baiknya kita memahami terlebih dahulu apa yang dimaksud dengan 'model'. Dalam kehidupan sehari-hari, kata 'model' merujuk pada representasi atau tiruan dari sesuatu. Peta adalah model dari permukaan bumi; denah rumah adalah model dari bangunan; mainan pesawat adalah model dari pesawat sesungguhnya. Setiap model menyederhanakan realitas dengan hanya menonjolkan aspek-aspek yang relevan dengan tujuan tertentu.

Dalam konteks ilmiah, sebuah model adalah representasi yang disederhanakan dari suatu sistem atau fenomena nyata, yang dibuat untuk tujuan tertentu. Model matematika secara khusus menggunakan bahasa dan struktur matematika (persamaan,



pertidaksamaan, fungsi, matriks, dan sebagainya) untuk merepresentasikan sistem tersebut.

Definisi

Pemodelan matematika adalah proses membangun, menganalisis, dan menginterpretasikan representasi matematis dari suatu sistem atau fenomena nyata, dengan tujuan memahami perilaku sistem, membuat prediksi, atau mengoptimalkan suatu kondisi.

Definisi ini mengandung beberapa kata kunci penting: (1) membangun: proses aktif menyusun persamaan; (2) menganalisis: mengkaji sifat-sifat solusi; (3) menginterpretasikan: mengembalikan hasil matematis ke dalam konteks nyata; dan (4) sistem atau fenomena nyata: pemodelan selalu dimotivasi oleh masalah dunia nyata.

1.2.1 Sejarah Singkat Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika bukanlah disiplin baru. Sejak zaman kuno, manusia telah menggunakan matematika untuk memodelkan alam. Ptolemeus (abad ke-2 M) menggunakan model geometris untuk menjelaskan gerak planet. Isaac Newton (abad ke-17) merumuskan hukum gerak dan gravitasi dalam bentuk persamaan diferensial, sebuah terobosan besar dalam sejarah pemodelan. Leonhard Euler dan Joseph-Louis Lagrange kemudian mengembangkan metode matematis yang memperkuat fondasi pemodelan mekanika.

Abad ke-20 menyaksikan ledakan besar dalam pemodelan matematika. Vito Volterra (1926) dan Alfred Lotka (1925) secara independen mengembangkan model predator-prey yang menjadi salah satu model biologi paling ikonik. Ronald Ross memenangkan Nobel Kedokteran (1902) atas pemodelan matematika penyakit malaria. William Kermack dan Anderson McKendrick (1927)



memperkenalkan model epidemi SIR yang masih digunakan hingga saat ini, termasuk dalam pemodelan pandemi COVID-19.

Era komputer membuka babak baru. Simulasi numerik memungkinkan pemodelan sistem yang terlalu kompleks untuk diselesaikan secara analitik. Kini, pemodelan matematika diterapkan di hampir semua bidang ilmu: biologi, fisika, kimia, ekonomi, ilmu sosial, teknik, kedokteran, dan bahkan seni.

1.2.2 Tujuan dan Manfaat Pemodelan Matematika

Secara umum, terdapat empat tujuan utama pemodelan matematika:

Pemahaman (*Understanding*)

Memahami mekanisme suatu fenomena secara kuantitatif. Mengapa wabah berkembang? Apa faktor yang menentukan kestabilan ekosistem? Model matematika memaksa kita untuk berpikir secara tepat dan terukur tentang mekanisme yang mendasari suatu fenomena.

Prediksi (*Prediction*)

Memprakirakan perilaku sistem di masa depan berdasarkan kondisi awal dan parameter yang diketahui. Model iklim, misalnya, digunakan untuk memprediksi suhu global beberapa dekade ke depan berdasarkan skenario emisi tertentu.

Kontrol dan Optimasi (*Control & Optimization*)

Menentukan kondisi atau kebijakan yang menghasilkan *outcome* terbaik. Bagaimana menentukan jadwal vaksinasi agar wabah teratasi dalam waktu sesingkat mungkin dengan sumber daya minimal? Model optimasi membantu menjawab pertanyaan seperti ini.

Pengujian Hipotesis (*Hypothesis Testing*)

Menguji apakah suatu hipotesis ilmiah konsisten secara matematis sebelum dilakukan eksperimen yang mahal dan memakan waktu.

Jika model berdasarkan hipotesis tidak menghasilkan prediksi yang sesuai data, hipotesis perlu direvisi.

1.3 Tahapan Proses Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika bukan sekedar menulis persamaan, ia adalah sebuah proses siklikal yang melibatkan beberapa tahapan yang saling terkait. Memahami setiap tahapan ini sangat penting agar model yang dihasilkan bermakna, valid, dan dapat digunakan untuk tujuan yang dimaksud.

Siklus Pemodelan Matematika

*Masalah Nyata → Identifikasi → Formulasi → Analisis/Solusi → Validasi
→ Interpretasi → (Kembali ke Masalah jika perlu)*

Tahap 1: Identifikasi Masalah

Tahap pertama adalah mengidentifikasi dengan jelas masalah yang akan dimodelkan. Ini mencakup: (a) mendefinisikan sistem yang diamati dan batas-batasnya; (b) menentukan tujuan pemodelan, apakah untuk memahami, memprediksi, atau mengoptimalkan; dan (c) mengumpulkan informasi awal tentang sistem, termasuk data empiris yang tersedia.

Pada tahap ini, pertanyaan seperti: 'Apa yang ingin kita ketahui?' dan 'Faktor apa saja yang relevan?' harus dijawab dengan jelas. Kesalahan dalam identifikasi masalah akan menyebabkan model yang dihasilkan tidak relevan, tidak peduli seberapa canggih matematika yang digunakan.

Tahap 2: Formulasi Model

Formulasi adalah inti dari pemodelan — di sinilah fenomena nyata diterjemahkan ke dalam bahasa matematika. Tahap ini melibatkan:



- ✓ Pemilihan variabel: Menentukan besaran-besaran yang berubah dan ingin dipelajari (misalnya: jumlah populasi $N(t)$, konsentrasi obat $C(t)$, suhu $T(x, t)$).
- ✓ Penentuan parameter: Mengidentifikasi konstanta yang mencirikan sistem (misalnya: laju pertumbuhan r , konstanta difusi D , koefisien pemangsaan β).
- ✓ Penyusunan asumsi: Menyederhanakan sistem nyata menjadi representasi yang dapat dikelola secara matematis. Setiap asumsi harus dinyatakan secara eksplisit dan dapat dibenarkan secara ilmiah.
- ✓ Penulisan persamaan: Berdasarkan variabel, parameter, dan asumsi yang telah ditentukan, menyusun persamaan atau sistem persamaan yang merepresentasikan dinamika sistem.

 **Catatan:** Asumsi adalah pedang bermata dua. Di satu sisi, asumsi menyederhanakan model sehingga dapat dianalisis. Di sisi lain, asumsi yang terlalu kuat dapat membuat model tidak realistis. Kualitas sebuah model sering ditentukan oleh kualitas asumsinya.

Tahap 3: Penyelesaian Model

Setelah model tersusun, langkah berikutnya adalah mencari solusinya. Solusi dapat dicari melalui dua pendekatan:

- ✓ Analitik: Mendapatkan solusi dalam bentuk fungsi eksplisit menggunakan teknik kalkulus, aljabar linear, atau metode khusus lainnya. Contoh: solusi persamaan logistik $N(t) = K/(1 + Ce^{-rt})$.
- ✓ Numerik: Menggunakan algoritma komputasi untuk mengaproksimasi solusi ketika solusi analitik tidak dapat ditemukan atau terlalu kompleks. Contoh: metode Euler, Runge-Kutta, metode beda hingga.

Tidak semua model memiliki solusi analitik tertutup. Model nonlinier, misalnya, hampir selalu memerlukan pendekatan

numerik. Oleh karena itu, penguasaan metode numerik merupakan keterampilan esensial dalam pemodelan matematika modern.

Tahap 4: Validasi Model

Validasi adalah proses memverifikasi bahwa model yang dibangun secara memadai merepresentasikan sistem nyata yang dimaksud. Ini dilakukan dengan membandingkan prediksi model dengan data empiris atau hasil eksperimen yang independen dari data yang digunakan untuk membangun model.

Beberapa metode validasi yang umum digunakan meliputi: (1) perbandingan grafis antara kurva solusi model dan data observasi; (2) perhitungan ukuran kesalahan seperti *Mean Absolute Error* (MAE) atau *Root Mean Square Error* (RMSE); (3) uji statistik untuk mengevaluasi kesesuaian model (*goodness of fit*); dan (4) analisis residual untuk mendeteksi pola sistematis yang tidak dijelaskan oleh model.

Jika model gagal divalidasi, proses kembali ke tahap identifikasi atau formulasi, inilah sifat siklikal dari pemodelan matematika.

Tahap 5: Interpretasi dan Pelaporan

Tahap akhir adalah menginterpretasikan hasil matematis kembali ke dalam konteks masalah nyata. Angka-angka dan fungsi matematis harus diterjemahkan menjadi pernyataan yang bermakna bagi pengguna model, mungkin seorang dokter, ekonom, atau pembuat kebijakan yang tidak memiliki latar belakang matematika mendalam.

Pelaporan yang baik mencakup: (1) penjelasan model dan asumsinya secara transparan; (2) penyajian hasil dengan visualisasi yang efektif (grafik, tabel); (3) diskusi tentang keterbatasan model; dan (4) rekomendasi berbasis hasil model. Kemampuan berkomunikasi ilmiah ini dibahas lebih lanjut di Bab 9.



Contoh 1.1: Siklus Pemodelan — Penyebaran Informasi di Media Sosial

Misalkan kita ingin memodelkan penyebaran berita viral di media sosial.

Tahap 1 (Identifikasi): Masalah: Seberapa cepat berita menyebar? Berapa banyak orang yang akan terekspos? Tujuan: Memprediksi puncak penyebaran.

Tahap 2 (Formulasi): Variabel: $N(t)$ = jumlah orang yang telah membaca berita pada waktu t . Parameter: r = laju berbagi (*share rate*), K = total pengguna aktif. Asumsi: Setiap pembaca akan membagikan berita dengan probabilitas konstan r . Model logistik: $dN/dt = rN(1 - N/K)$.

Tahap 3 (Solusi): $N(t) = K / (1 + ((K - N_0)/N_0)e^{-rt})$.

Tahap 4 (Validasi): Bandingkan kurva $N(t)$ dengan data insight platform media sosial.

Tahap 5 (Interpretasi): Puncak laju penyebaran (*inflection point*) terjadi saat $N = K/2$, pada $t = \ln((K - N_0)/N_0)/r$.

1.4 Klasifikasi Model Matematika

Model matematika dapat diklasifikasikan berdasarkan berbagai kriteria. Memahami klasifikasi ini membantu kita memilih jenis model yang paling sesuai untuk suatu fenomena tertentu, serta menentukan metode analisis yang tepat.

1.4.1 Deterministik vs Stokastik

Pembedaan paling mendasar dalam pemodelan adalah antara model deterministik dan stokastik.

Aspek	Model Deterministik	Model Stokastik
Definisi	Output ditentukan sepenuhnya oleh input	Output memiliki komponen acak; untuk input yang sama, output bisa berbeda.

Aspek	Model Deterministik	Model Stokastik
	dan kondisi awal, tidak ada keacakan.	
Representasi Matematika	Persamaan diferensial biasa (PDB), persamaan aljabar, optimasi.	Persamaan diferensial stokastik (SDE), rantai Markov, proses Poisson.
Contoh	Model Malthus: $\frac{dN}{dt} = rN$	Model kelahiran-kematian stokastik dengan laju Poisson.
Kelebihan	Lebih mudah dianalisis secara analitik; hasil deterministik dan jelas.	Lebih realistis untuk sistem dengan variabilitas inheren.
Keterbatasan	Tidak menangkap ketidakpastian alamiah sistem.	Lebih kompleks secara matematis dan komputasional.
Aplikasi Umum	Mekanika klasik, pertumbuhan populasi besar, reaksi kimia massal.	Genetika populasi kecil, keuangan (<i>Black-Scholes</i>), epidemi skala kecil.

Dalam buku ajar ini, kita akan berfokus pada model deterministik, yang lebih mudah dipelajari dan memiliki fondasi analitik yang kuat. Namun, penting untuk menyadari bahwa banyak fenomena nyata memiliki komponen stokastik yang signifikan.

 **Catatan:** Kapan memilih model stokastik? Ketika ukuran populasi sangat kecil (kurang dari ~100 individu), ketidakpastian menjadi sangat penting dan model deterministik dapat memberikan hasil yang menyesatkan. Sebagai contoh, dalam memodelkan kepunahan spesies langka atau awal suatu wabah dengan sedikit kasus indeks.

1.4.2 Diskret vs Kontinu

Klasifikasi kedua berkaitan dengan bagaimana variabel waktu (atau ruang) direpresentasikan dalam model.

Aspek	Model Diskret	Model Kontinu
Variabel Waktu	Berubah dalam langkah-langkah terputus: $t = 0, 1, 2, \dots, n$.	Berubah secara menerus: $t \in [0, \infty)$ atau $t \in \mathbb{R}$.
Representasi Matematika	Persamaan rekurens atau beda: $N_{n+1} = f(N_n)$.	Persamaan diferensial: $dN/dt = f(N, t)$.
Contoh	Populasi ikan per musim: $N_{n+1} = \lambda N_n(1 - N_n/K)$.	Pertumbuhan bakteri: $dN/dt = rN$.
Kelebihan	Alami untuk sistem generasi terpisah (serangga musiman, sensus tahunan).	Alami untuk sistem yang berubah terus-menerus (fisika, kimia, biologi molekuler).
Analisis	Aljabar linear, teori matriks, analisis kestabilan titik tetap.	Kalkulus diferensial, teori persamaan diferensial.

Keduanya memiliki legitimasi dan kegunaan masing-masing. Bahkan ada hubungan mendalam antara keduanya: model diskret sering muncul sebagai aproksimasi numerik dari model kontinu, dan sebaliknya, model kontinu sering merupakan limit dari model diskret ketika langkah waktu mendekati nol.

1.4.3 Linier vs Nonlinier

Linearitas atau nonlinearitas suatu model sangat menentukan metode analisis yang tersedia dan kompleksitas perilaku yang dapat dihasilkan.

Aspek	Model Linier	Model Nonlinier
Definisi	Persamaan memenuhi prinsip superposisi: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.	Tidak memenuhi prinsip superposisi; mengandung suku seperti $x^2, xy, \sin(x), e^x$.
Contoh PD	$dy/dt = ky$ (pertumbuhan eksponensial)	$dN/dt = rN(1 - N/K)$ (pertumbuhan logistik)
Penyelesaian Analitik	Umumnya selalu tersedia.	Seringkali tidak tersedia; perlu metode numerik atau analisis kualitatif.
Perilaku Solusi	Sederhana: eksponensial tumbuh, turun, atau osilasi harmonik.	Kaya: osilasi nonlinear, bifurkasi, chaos, limit cycle.
Kestabilan	Dapat ditentukan secara global dan eksak.	Umumnya hanya kestabilan lokal yang dapat ditentukan (linearisasi).

Hampir semua fenomena nyata yang menarik bersifat nonlinear. Salah satu tugas utama pemodelan adalah memutuskan kapan linearisasi masih memberikan aproksimasi yang cukup baik dan kapan nonlinearitas harus dipertahankan untuk mendapatkan hasil yang bermakna.

1.4.4 Otonom vs Non-otonom

Model dikatakan otonom jika persamaan-persamaan yang membentuknya tidak bergantung secara eksplisit pada variabel waktu t . Sebagai contoh, $dN/dt = rN(1 - N/K)$ adalah otonom karena ruas kanan tidak memuat t secara eksplisit. Sebaliknya, $dN/dt = r(t)N(1 - N/K)$ adalah non-otonom jika $r(t)$ merupakan fungsi waktu (misalnya, laju pertumbuhan musiman).

Sistem otonom memiliki sifat analitik yang lebih baik (diagram fase dapat dianalisis tanpa referensi ke waktu) sehingga lebih mudah dikaji. Sebagian besar model dalam buku ajar ini adalah otonom.

1.4.5 Model Berdasarkan Ruang: Lumped vs Distributed

Model lumped (atau terpusat) mengasumsikan bahwa variabel terdistribusi secara homogen di seluruh ruang, sehingga variabel hanya bergantung pada waktu: $N = N(t)$. Model distributed (atau terdistribusi) mengasumsikan bahwa variabel bervariasi dalam ruang dan waktu: $N = N(x, t)$, direpresentasikan oleh persamaan diferensial parsial (PDP).

Sebagian besar model dalam buku ajar ini adalah model lumped (ODE), yang merupakan titik awal yang wajar sebelum memasuki pemodelan spasial yang lebih kompleks.

1.5 Variabel, Parameter, dan Asumsi dalam Pemodelan

Tiga konsep ini adalah bahan baku dari setiap model matematika. Memahami perbedaan dan peran masing-masing sangat krusial untuk membangun model yang valid dan bermakna.

1.5.1 Variabel

Variabel adalah besaran yang nilainya berubah selama proses atau fenomena berlangsung. Variabel dibedakan menjadi:

- ✓ **Variabel Keadaan (State Variables).** Variabel yang mendeskripsikan 'keadaan' sistem pada suatu waktu. Contoh: $N(t)$ = jumlah populasi, $S(t)$ = jumlah individu rentan penyakit, $x(t)$ = posisi benda.
- ✓ **Variabel Bebas (Independent Variables).** Variabel yang nilainya ditentukan secara independen, biasanya waktu t atau posisi x . Persamaan diferensial menyatakan bagaimana variabel keadaan berubah terhadap variabel bebas.
- ✓ **Variabel Terikat (Dependent Variables).** Variabel yang nilainya bergantung pada variabel bebas melalui persamaan model. Dalam $dN/dt = rN$, maka N adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas.

1.5.2 Parameter

Parameter adalah konstanta yang mencirikan sistem tertentu. Berbeda dengan variabel, parameter tidak berubah selama proses berlangsung (setidaknya dalam konteks model yang diberikan). Nilai parameter biasanya ditentukan dari:

- ✓ Data empiris: Estimasi dari eksperimen atau observasi lapangan.
- ✓ Literatur: Nilai yang telah dilaporkan dalam penelitian-penelitian sebelumnya.
- ✓ Kalibrasi: Proses menyesuaikan nilai parameter agar prediksi model cocok dengan data yang diamati.

Contoh 1.2: Parameter dalam Berbagai Model

Model Malthus ($dN/dt = rN$): parameter r adalah laju pertumbuhan intrinsik. Untuk populasi manusia suatu negara, r = laju kelahiran – laju kematian $\approx 0,02$ /tahun.

Model SIR (lihat Bab 3): parameter β adalah laju transmisi penyakit (kontak efektif per satuan waktu) dan γ adalah laju kesembuhan (invers rata-rata masa infeksi).



Hukum Newton ($m \cdot d^2x/dt^2 = F$): parameter m adalah massa benda, yang merupakan sifat intrinsik benda dan tidak bergantung pada gerakannya.

Penting untuk membedakan parameter yang diketahui (dapat diukur langsung) dan parameter yang tidak diketahui (harus diestimasi). Proses estimasi parameter adalah cabang ilmu tersendiri yang dikenal sebagai *inverse problems* atau *parameter identification*.

1.5.3 Asumsi

Asumsi adalah kondisi atau penyederhanaan yang diterima sebagai benar selama pemodelan berlangsung. Tidak ada model yang dapat merepresentasikan realitas secara sempurna — setiap model pasti memuat asumsi. Kualitas sebuah model sangat ditentukan oleh apakah asumsinya *reasonable* (masuk akal) dan apakah keterbatasan yang ditimbulkan oleh asumsi tersebut dapat diterima untuk tujuan pemodelan.

Asumsi dapat dikategorikan sebagai:

- ✓ Asumsi struktural: Terkait dengan struktur model secara keseluruhan, misalnya 'populasi tercampur secara homogen' (*homogeneous mixing assumption*) dalam model SIR.
- ✓ Asumsi parametrik: Terkait dengan nilai atau sifat parameter, misalnya 'laju pertumbuhan konstan' atau 'parameter berdistribusi normal'.
- ✓ Asumsi batas (*boundary assumptions*): Terkait dengan kondisi di tepi domain, misalnya 'tidak ada migrasi keluar-masuk populasi' (*closed population assumption*).

 **Catatan:** *Prinsip Occam's Razor dalam pemodelan: 'Model yang baik adalah model yang sesederhana mungkin tetapi tidak lebih sederhana dari yang diperlukan.' Jangan menambahkan kompleksitas yang tidak perlu — namun jangan juga terlalu menyederhanakan hingga model kehilangan kemampuan prediksinya.*

1.6 Hubungan Pemodelan Matematika dengan Cabang Matematika Lain

Pemodelan matematika bukan cabang yang berdiri sendiri, ia merupakan aplikasi dari berbagai cabang matematika sekaligus. Pemahaman yang kuat tentang hubungan ini akan membantu Anda membangun intuisi tentang alat matematika mana yang tepat untuk jenis model tertentu.

Cabang Matematika	Peran dalam Pemodelan	Contoh Penerapan
Persamaan Diferensial	Bahasa utama model kontinu; mendeskripsikan laju perubahan.	Model populasi, epidemiologi, mekanika, kimia.
Aljabar Linear	Analisis sistem linear; matriks Jacobian untuk kestabilan.	Analisis kestabilan, komputasi nilai eigen.
Kalkulus	Dasar penurunan persamaan; optimasi; analisis solusi.	Mencari titik ekuilibrium, optimasi parameter.
Probabilitas & Statistik	Model stokastik; estimasi parameter; validasi model.	Model epidemi stokastik, regresi, uji kesesuaian.
Analisis Numerik	Penyelesaian model yang tidak memiliki solusi analitik.	Metode Euler, Runge-Kutta, metode beda hingga.



Cabang Matematika	Peran dalam Pemodelan	Contoh Penerapan
Teori Graf	Pemodelan jaringan dan interaksi.	Jaringan penyebaran penyakit, jaringan makanan.
Optimasi	Menentukan nilai parameter atau kebijakan optimal.	Pengendalian wabah, alokasi sumber daya.

1.7 Contoh Lengkap: Membangun Model dari Awal

Untuk mengkonkretkan semua konsep yang telah dibahas, mari kita ikuti secara lengkap proses membangun model matematika dari awal hingga akhir. Kita akan memodelkan pertumbuhan populasi tanaman invasif di suatu danau.

Contoh 1.3: Model Pertumbuhan Eceng Gondok di Danau

Situasi:

Eceng gondok (*Eichhornia crassipes*) adalah tanaman invasif yang tumbuh sangat cepat di permukaan danau, menutupi sinar matahari dan mengancam ekosistem air. Seorang pengelola danau ingin memprediksi kapan eceng gondok akan menutupi seluruh permukaan danau (luas 5 km^2) jika sekarang sudah menutupi $0,1 \text{ km}^2$.

Tahap 1 – Identifikasi Masalah:

Variabel yang diminati: Luas permukaan yang ditutupi eceng gondok, $A(t)$ (km^2).

Tujuan: Memprediksi $A(t)$ untuk berbagai t , khususnya waktu ketika $A = 5 \text{ km}^2$.

Informasi awal: Laju pertumbuhan eceng gondok diketahui sekitar 10% per minggu (dari literatur). Luas danau $K = 5 \text{ km}^2$. Kondisi awal $A(0) = 0,1 \text{ km}^2$.

Tahap 2 – Formulasi Model:

Asumsi: (a) Laju pertumbuhan proporsional dengan luas saat ini (eceng gondok berkembang biak dari tepi). (b) Pertumbuhan dibatasi oleh luas total danau K . (c) Tidak ada gangguan manusia atau hewan. (d) Kondisi lingkungan (suhu, nutrisi) diasumsikan homogen dan konstan.

Dengan asumsi (a) dan (b), kita gunakan model logistik: $dA/dt = rA(1 - A/K)$, dengan $r = 0,10/\text{minggu}$, $K = 5 \text{ km}^2$, $A(0) = 0,1 \text{ km}^2$.

Tahap 3 – Penyelesaian Analitik:

Solusi persamaan logistik: $A(t) = K / (1 + ((K - A_0)/A_0)e^{-rt}) = 5 / (1 + 49e^{-0,1t})$.

Untuk mencari kapan $A = 4,9 \text{ km}^2$ (99% tertutup): $t = \ln(49 \times 4,9/0,1)/0,1 \approx \ln(2401)/0,1 \approx 78 \text{ minggu} \approx 1,5 \text{ tahun}$.

Tahap 4 – Validasi (Hipotesis):

Untuk memvalidasi, pengelola danau dapat mengukur luas aktual setiap minggu selama 2 bulan dan membandingkan dengan prediksi model. Jika ada perbedaan signifikan, asumsi perlu dievaluasi ulang.

Tahap 5 – Interpretasi:

Pengelola danau disarankan untuk mengambil tindakan (pembersihan mekanis atau biologis) dalam waktu 6 bulan ke depan, sebelum eceng gondok mencapai lebih dari 50% luas danau (~39 minggu dari sekarang), karena setelah titik tengah pertumbuhan akan melambat namun pengendalian menjadi jauh lebih mahal.

1.8 Keterbatasan Model Matematika

Pemodelan matematika adalah alat yang sangat kuat, namun penting untuk memahaminya keterbatasannya agar tidak terjebak dalam '*worship of the model*' mengikuti prediksi model secara



membabi buta tanpa mempertanyakan asumsi dan keterbatasannya.

Keterbatasan Umum Model Matematika

⚠ **Semua model salah, beberapa berguna:** Kutipan terkenal dari statistikawan *George Box* ini mengingatkan bahwa setiap model adalah penyederhanaan. Pertanyaannya bukan apakah model itu benar, melainkan apakah ia cukup berguna untuk tujuan yang dimaksud.

⚠ **Sensitivitas terhadap asumsi:** Perubahan kecil pada asumsi dapat menghasilkan prediksi yang sangat berbeda, terutama pada model nonlinier. Analisis sensitivitas (Bab 7) membantu mengidentifikasi asumsi mana yang paling kritis.

⚠ **Masalah identifiabilitas:** Kadang data yang tersedia tidak cukup untuk menentukan nilai parameter secara unik. Dua set parameter yang berbeda bisa menghasilkan prediksi yang sama — inilah masalah non-identifiability.

⚠ **Overfitting vs Underfitting:** Model yang terlalu kompleks (banyak parameter) dapat 'menghapal' data training namun gagal memprediksi data baru (overfitting). Model yang terlalu sederhana melewati pola penting (underfitting).

⚠ **Extrapolation hazard:** Model yang valid dalam rentang data tertentu bisa memberikan prediksi yang tidak masuk akal jika digunakan di luar rentang tersebut.

Kesadaran akan keterbatasan ini bukan berarti kita harus bersikap pesimis terhadap pemodelan. Sebaliknya, dengan memahami keterbatasan ini, kita menjadi pembangun model yang lebih baik, yang tahu kapan harus mempercayai model dan kapan harus mempertanyakannya.

Latihan Soal

1. Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri apa yang dimaksud dengan pemodelan matematika dan berikan tiga contoh penerapannya di bidang yang berbeda!
2. Gambarkan siklus pemodelan matematika dan jelaskan secara singkat apa yang dilakukan di setiap tahapan!
3. Sebuah perusahaan memodelkan pertumbuhan pelanggan mereka. Identifikasi: (a) variabel keadaan, (b) variabel bebas, (c) setidaknya dua parameter yang relevan, dan (d) tiga asumsi yang mungkin digunakan.
4. Klasifikasikan model-model berikut sebagai deterministik/stokastik, diskret/kontinu, dan linier/nonlinier: (a) $dP/dt = 0,03P$; (b) $N_{n+1} = 2,8N_n(1 - N_n)$; (c) model pergerakan harga saham dengan noise *Brownian*.
5. Sebuah gelas kopi panas diletakkan di ruangan bersuhu 25°C . Suhu awal kopi adalah 90°C dan diketahui mendingin mengikuti Hukum Newton: $dT/dt = -k(T - 25)$, dengan $k = 0,05/\text{menit}$. (a) Identifikasi variabel, parameter, dan asumsi model. (b) Klasifikasikan model. (c) Selesaikan secara analitik dan tentukan suhu kopi setelah 20 menit.
6. Mengapa validasi model penting? Apa yang harus dilakukan jika model gagal divalidasi? Jelaskan dengan contoh konkret!
7. Diskusikan keterbatasan model populasi yang mengasumsikan lingkungan homogen (seragam di seluruh ruang). Fenomena apa yang tidak dapat dijelaskan oleh model seperti ini?
8. Carilah satu contoh penggunaan pemodelan matematika dalam berita atau artikel ilmiah terkini. Identifikasi: jenis model yang digunakan, variabel, parameter, dan kesimpulan yang diambil.



Rangkuman Bab 1

- ✓ Pemodelan matematika adalah proses membangun, menganalisis, dan menginterpretasikan representasi matematis dari fenomena nyata.
- ✓ Tujuan utama: pemahaman, prediksi, kontrol/optimasi, dan pengujian hipotesis.
- ✓ Siklus pemodelan: Identifikasi → Formulasi → Solusi → Validasi → Interpretasi (bersifat iteratif).
- ✓ Variabel: besaran yang berubah (keadaan, bebas, terikat).
- ✓ Parameter: konstanta yang mencirikan sistem; ditentukan dari data, literatur, atau kalibrasi.
- ✓ Asumsi: penyederhanaan yang diperlukan; harus dinyatakan eksplisit dan dapat dibenarkan.
- ✓ Klasifikasi model: deterministik/stokastik, diskret/kontinu, linier/nonlinier, otonom/non-otonom, lumped/distributed.
- ✓ Semua model adalah penyederhanaan; kekuatan model terletak pada kegunaannya, bukan kesempurnaannya.

DAFTAR PUSTAKA

- American Psychological Association. (2020). *Publication Manual of the American Psychological Association* (7th ed.). APA.
- Brauer, F. & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (2nd ed.). Springer.
- Burden, R.L. & Faires, J.D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning. Chapters 5–6.
- Burnham, K.P. & Anderson, D.R. (2002). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach* (2nd ed.). Springer.
- Council of Science Editors. (2014). *Scientific Style and Format: The CSE Manual for Authors, Editors, and Publishers* (8th ed.). University of Chicago Press.
- Diekmann, O. & Heesterbeek, J.A.P. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. Wiley, Chichester.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. SIAM, Philadelphia.
- IEEE Editorial Style Manual. (2023). *IEEE*. Retrieved from <https://journals.ieeeauthorcenter.ieee.org>.
- Keeling, M.J. & Rohani, P. (2008). *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton Univ. Press.
- Kerami, D. (2015). *Pemodelan Matematis*. Universitas Terbuka, Tangerang Selatan. Modul 1.
- Marom, S. (2023). *Pemodelan Matematika*. UIN Salatiga.
- Na'malia, S., Faisol, & Yulianto, T. (2025). Modeling the spread of Hepatitis B disease from the SEIR model in East Java using RKF 45. *Tensor: Pure and Applied Mathematics Journal*, 6(2), 1–12. doi:10.30598/tensorvol6iss1pp1-12



- Nurmadhani, N., & Faisol. (2022). Penerapan model pertumbuhan logistik dalam memproyeksikan jumlah penduduk di Kabupaten Sumenep. *Jurnal Edukasi dan Sains Matematika (JES-MAT)*, 8(2), 145–156. doi:10.25134/jes-mat.v8i2.5436
- Saltelli, A. et al. (2008). *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. John Wiley & Sons.
- Sober, E. (2002). Instrumentalism, parsimony, and the Akaike framework. *Philosophy of Science*, 69(S3), S112–S123.
- Strogatz, S.H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos* (2nd ed.). Westview Press. Chapter 6.
- Strunk, W. & White, E.B. (2000). *The Elements of Style* (4th ed.). Longman.
- Tsoularis, A. & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*, 179(1), 21–55.
- Turabian, K.L. (2018). *A Manual for Writers of Research Papers, Theses, and Dissertations* (9th ed.). University of Chicago Press.
- van den Driessche, P. & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48.
- Widowati & Sutimin (2007). *Pemodelan Matematika*. Buku Ajar. Universitas Diponegoro, Semarang.

PROFIL PENULIS



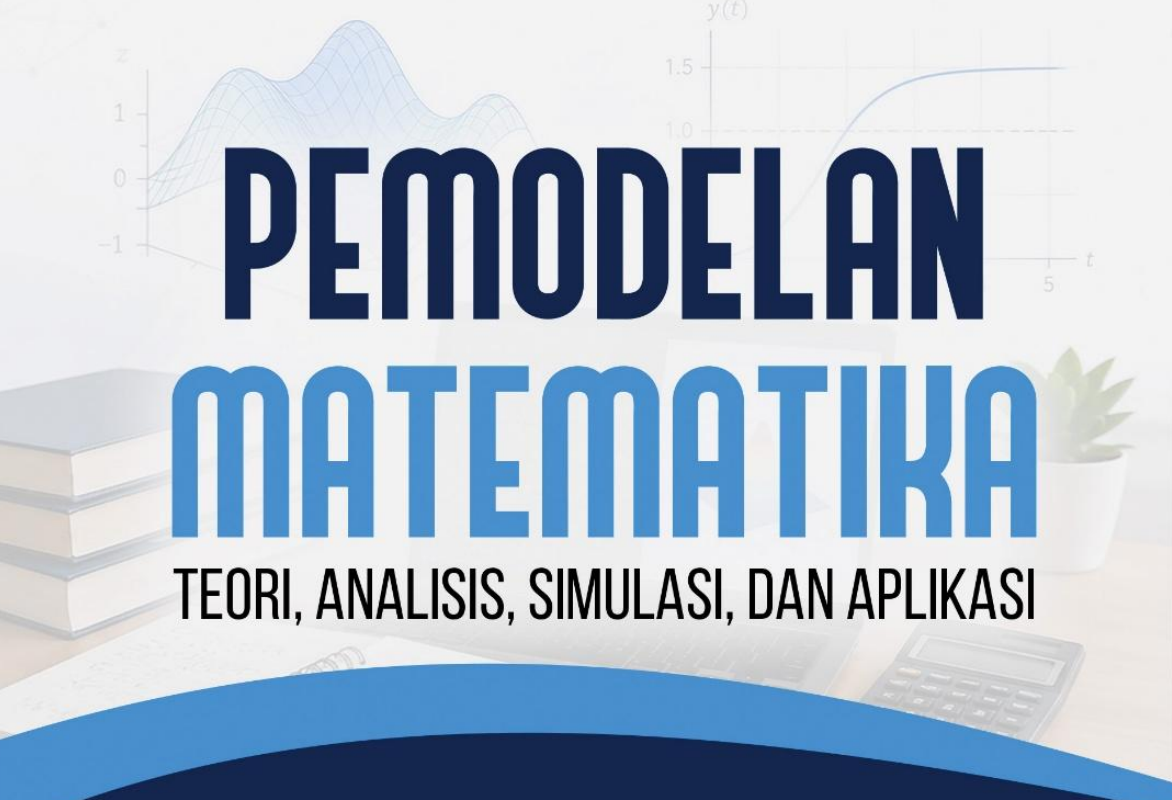
Faisol, M.Si. lahir di Sampang, Madura, pada 1 April 1986. Beliau menyelesaikan pendidikan S1 di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Islam Madura (UIM) Pamekasan, kemudian melanjutkan studi magister di Program Studi Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dengan gelar Magister Sains (M.Si.). Sejak tahun 2013, beliau mengabdikan sebagai Dosen Tetap Program Studi Matematika FMIPA UIM, mengampu mata kuliah Pemodelan Matematika, Persamaan Diferensial Biasa (PDB), dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

Dalam karir akademiknya, Faisol telah memegang berbagai jabatan strategis di UIM. Sejak 2015, beliau menjabat sebagai Ketua Program Studi Matematika FMIPA UIM, sekaligus aktif sebagai Editor di Zeta-Math Journal, jurnal matematika FMIPA UIM yang menjadi wahana publikasi karya peneliti matematika. Pada tahun 2019, beliau dipercaya menjabat sebagai Dekan Fakultas MIPA Universitas Islam Madura Pamekasan, memimpin pengembangan akademik, penelitian, dan pengabdian kepada masyarakat di lingkungan FMIPA UIM.

Bidang minat penelitian Faisol meliputi Matematika Terapan dan Pemodelan Matematika. Beliau telah mempublikasikan sejumlah karya ilmiah di jurnal nasional dan prosiding, mencakup topik-topik seperti pemodelan hasil tangkapan ikan, peramalan



epidemi AIDS, optimasi biaya produksi, hingga model matematika penyebaran penyakit. Publikasi lengkap dapat diakses melalui Google Scholar ([s.id/scholar-faisol](https://scholar.google.com/scholar-faisol)), dan beliau dapat dihubungi melalui email: faisol@uim.ac.id.



PEMODELAN MATEMATIKA

TEORI, ANALISIS, SIMULASI, DAN APLIKASI

Buku ajar ini hadir sebagai jawaban atas kebutuhan mendesak akan sumber belajar pemodelan matematika yang komprehensif, terapan, dan relevan dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi masa kini. Ditulis khusus untuk mahasiswa Program Studi Matematika jenjang Sarjana (S1) pada semester V, buku ini menyajikan pemodelan matematika bukan sekadar sebagai kumpulan persamaan diferensial, melainkan sebagai disiplin ilmu yang hidup — penuh dengan pertanyaan menarik, tantangan intelektual, dan aplikasi nyata yang mengubah cara kita memahami dunia.

Buku ini mengintegrasikan empat dimensi yang jarang hadir bersama dalam satu referensi: (1) teori matematika yang ketat dan sistematis, (2) analisis kualitatif yang mendalam menggunakan alat-alat modern seperti analisis kestabilan Lyapunov dan bifurkasi, (3) simulasi komputasi menggunakan Python dan MATLAB dengan kode yang lengkap dan siap-pakai, serta (4) aplikasi pada permasalahan nyata di bidang biologi, epidemiologi, ekologi, dan kebijakan publik.



PENERBIT KBM INDONESIA
Anggota IKAPI
0813 5751 7526 / (0353) 3234874
Kantor : Maguwoharjo, Depok, Sleman-Yogyakarta
@penerbitbukujogja
@penerbit.kbm

ISBN 978-634-278-477-8

