


$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

~~$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$~~

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

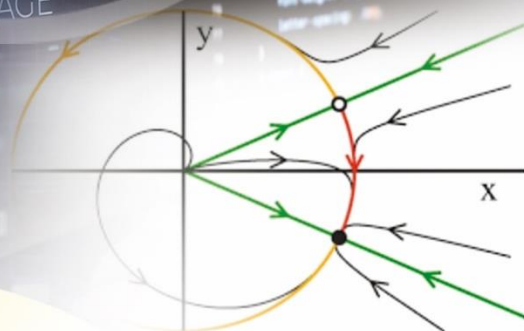
$$b)(a^2 - ab + b^2)$$

2 वा.पं.

$2ab + b$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)$$



PENGANTAR SISTEM DINAMIK DENGAN *MAPLE*

Teori Dan Aplikasi

Asrul Sani & Alhadi Bustamam



PENERBIT KBM INDONESIA

adalah penerbit dengan misi memudahkan proses penerbitan buku-buku penulis di tanah air Indonesia, serta menjadi media *sharing* proses penerbitan buku.

PENGANTAR SISTEM DINAMIK DENGAN *MAPLE*

Teori Dan Aplikasi

Copyright @2025 By Asrul Sani & Alhadi Bustamam

All right reserved

Penulis

Asrul Sani
Alhadi Bustamam

Desain Sampul

Aswan Kreatif

Tata Letak

AtikaNS

Editor

Dr. Muhamad Husein Maruapey, Drs., M.Sc.

Background isi buku di ambil dari <https://www.freepik.com/>

Official

Depok, Sleman-Jogjakarta (Kantor)

Penerbit Karya Bakti Makmur (KBM) Indonesia

Anggota IKAPI/No. IKAPI 279/JTI/2021

081357517526 (Tlpn/WA)

Website

<https://penerbitkbm.com>
www.penerbitbukumurah.com

Email

naskah@penerbitkbm.com

Distributor

<https://penerbitkbm.com/toko-buku/>

Youtube

Penerbit KBM Sastrabook

Instagram

[@penerbit.kbmindonesia](https://www.instagram.com/penerbit.kbmindonesia)
[@penerbitbukujogja](https://www.instagram.com/penerbitbukujogja)

ISBN: 978-634-202-502-4

Cetakan ke-1, Juli 2025

14,8 x 21 cm, viii + 324 halaman

Isi buku diluar tanggungjawab penerbit

Hak cipta merek KBM Indonesia sudah terdaftar di DJKI-Kemenkumham dan isi buku dilindungi undang-undang.

Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa seizin penerbit karena beresiko sengketa hukum

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

Undang-Undang No. 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta

- i. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 100.000.000 (seratus juta rupiah).
- ii. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
- iii. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
- iv. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

SINOPSIS



Buku ajar ini dirancang untuk membekali mahasiswa dengan dasar-dasar teori sistem dinamik serta penerapannya dalam berbagai fenomena nyata, dengan bantuan perangkat lunak **Maple** sebagai alat bantu komputasi simbolik dan numerik. Buku ini menyajikan pendekatan sistematis dan progresif terhadap topik-topik penting dalam sistem dinamik, dimulai dari landasan matematika hingga aplikasi tingkat lanjut seperti bifurkasi dan limit siklus. Pada **Bab 1**, pembaca akan dibekali kembali dengan konsep-konsep dasar matematika, termasuk matriks, nilai dan vektor eigen, serta operator eksponen yang penting untuk analisis sistem. Bab ini juga mengulas teori kestabilan yang menjadi fondasi untuk menganalisis perilaku sistem jangka panjang. **Bab 2** membahas sistem dinamik linier secara mendalam, mencakup sistem homogen dan tak homogen, serta penerapan metode Lyapunov untuk menilai kestabilan. Penekanan juga diberikan pada pemahaman geometris terhadap sistem linier berdimensi dua dan tinggi. **Bab 3** membawa pembaca ke dunia sistem nonlinier dengan menjelaskan proses linierisasi, teorema Hartman-Grobman, serta metode Lyapunov nonlinier. Disertakan juga berbagai model terapan, memperkuat pemahaman konseptual dengan konteks dunia nyata. **Bab 4** fokus pada solusi periodik dan limit siklus, membahas teori Poincaré-Bendixson, teorema Hopf, dan berbagai metode untuk mendeteksi serta

menganalisis siklus batas. Contoh model terkenal seperti Van der Pol, Lienard, dan Lorenz digunakan sebagai studi kasus. Akhirnya, **Bab 5** mengupas konsep bifurkasi—baik lokal maupun global—dan menjelaskan transisi dinamik yang terjadi akibat perubahan parameter sistem. Berbagai jenis bifurkasi, seperti saddle-node, transkritikal, pitchfork, hingga bifurkasi Hopf dan homoklinik, dibahas secara teoritis dan aplikatif. Contoh-contoh konkret dalam ekologi, epidemiologi, dan biologi sistemik memperkuat relevansi topik ini. Dikemas secara terstruktur dan didukung latihan di setiap bab, buku ini sangat ideal sebagai bahan ajar utama untuk mata kuliah Sistem Dinamik, baik di tingkat sarjana maupun pascasarjana. Penggunaan Maple memberikan pengalaman interaktif dan visualisasi yang mendalam, menjadikan buku ini tidak hanya teoritis, namun juga aplikatif.

KATA PENGANTAR



Buku ini bertujuan memberikan landasan konseptual mengenai sistem dinamik serta penerapannya, sekaligus membekali pembaca dengan keterampilan praktis dalam memanfaatkan perangkat lunak **Maple**, yang telah terbukti efektif dalam menyelesaikan berbagai permasalahan di bidang teknik dan sains.

Buku ini menyajikan materi secara terstruktur, dimulai dengan pengenalan konsep-konsep dasar matematika yang menjadi landasan dalam analisis sistem dinamik. Setelah itu, pembahasan berlanjut pada sistem linier dan nonlinier secara lebih mendalam, diikuti dengan pembahasan mengenai bifurkasi sebagai topik lanjutan. Setiap topik dilengkapi dengan penjelasan teoretis, contoh-contoh aplikatif, simulasi numerik, serta visualisasi hasil menggunakan perangkat lunak Maple. Selain itu, pembaca juga akan diperkenalkan pada berbagai penerapan sistem dinamik dalam konteks dunia nyata, termasuk di bidang teknik, ekonomi, dan biologi.

Buku ini ditujukan bagi mahasiswa, dosen, dan praktisi yang ingin memperdalam pemahaman tentang sistem dinamik, baik secara teoritis maupun praktis, melalui pendekatan berbasis perangkat lunak Maple. Setiap Bab dilengkapi dengan contoh serta latihan untuk memperkuat pemahaman konsep secara bertahap.

Penulis sangat menghargai saran dan masukan apabila ditemukan ada kesalahan, kesulitan dalam memahami, ataupun hal lain yang dapat meningkatkan kualitas buku ini pada edisi-edisi berikutnya. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat dan menjadi kontribusi nyata dalam pengembangan ilmu pengetahuan di Indonesia.

Penulis

DAFTAR ISI



SINOPSIS --- i

KATA PENGANTAR --- iii

DAFTAR ISI --- v

BAB 1

DASAR-DASAR MATEMATIKA --- 1

1.1 Bentuk Umum Persamaan Linier --- 1

1.2 Matriks --- 2

1.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen --- 7

1.3.1 Nilai Eigen Ril Berbeda --- 9

1.3.2 Nilai Eigen Ril Ganda --- 13

1.3.3 Nilai Eigen Kompleks --- 17

1.4 Spektral Radius --- 21

1.5 Diagonalisasi --- 22

1.6 Operator Eksponen --- 29

1.7 Persamaan Diferensial --- 35

1.8 Teori Kestabilan --- 38

1.8.1 Kestabilan Manifold --- 39

1.8.2 Kriteria Routh-Hurwitz --- 43

LATIHAN --- 53

BAB 2

SISTEM DINAMIK LINIER --- 57

2.1 Bentuk Umum --- 57

2.2 Sistem Linier Homogen --- 60

2.2.1 Teorema Fundamental Sistem Linier Homogen --- 61

2.2.2 Sistem Linier Homogen pada Dimensi Dua ---	65
2.2.2.1 Sistem Saling Lepas ---	65
2.2.2.2. Sistem Saling Berkaitan ---	67
2.2.2.3 Nilai Eigen Ril dan Berbeda ---	73
2.2.2.4 Nilai Eigen Kompleks ---	84
2.2.3 Sistem Linier Homogen pada Dimensi Tinggi ---	90
2.3 Metode Lyapunov untuk Sistem Linier ---	103
2.4 Sistem Linier Nonhomogen ---	110
2.5 Terapan Sistem Linier ---	116
LATIHAN ---	124

BAB 3

SISTEM NONLINIER --- 129

3.1 Linierisasi ---	133
3.2 Sistem Nonlinier Dimensi Dua ---	137
3.3 Teorema Hartman-Grobman ---	147
3.5 Fungsi Lyapunov Sistem Nonlinier ---	153
3.4 Aplikasi ---	163
LATIHAN ---	177

BAB 4

SOLUSI PERIODIK DAN LIMIT SIKLUS --- 181

4.1 Solusi Periodik ---	182
4.1.1 Definisi Solusi Periodik ---	182
4.1.2 Teorema Poincaré-Bendixson ---	186
4.2 Limit Siklus ---	191
4.2.1 Definisi Limit Siklus ---	191
4.2.2 Teorema Poincare (Teorema Indeks) ---	195
4.2.3 Teorema Andronov-Hopf (Bifurkasi Hopf) ---	197
4.2.4 Teorema Dulac (Ketidakhadiran Limit Siklus) ---	199
4.2.5 Teorema Bendixon-Dulac ---	202
4.3 Aplikasi ---	205
4.3.1 Persamaan Van der Pol ---	205
4.3.2 Persamaan Lienard ---	209
4.3.3 Persamaan FitzHugh-Nagumo ---	221
4.3.4 Model Chen-Liu ---	222
4.3.5 Model Lorenz ---	223
LATIHAN ---	226

BAB 5

BIFURKASI --- 229

- 5.1 Pengertian Bifurkasi --- 229
- 5.2 Bifurkasi Lokal --- 231
 - 5.2.1 Bifurkasi Satu-Dimensi --- 231
 - 5.2.2 Bifurkasi Dua-Dimensi --- 257
- 5.3 Bifurkasi Global --- 276
 - 5.3.1 Bifurkasi SNP (Sadle Node Periodik) --- 276
 - 5.3.2 Bifurkasi Homoklinik --- 277
 - 5.3.3 Bifurkasi Heteroklinik --- 283
 - 5.3.4 Bifurkasi SNIPER --- 287
- 5.4 Aplikasi --- 290
 - 5.4.1 Bifurkasi Sadle-Node pada model populasi --- 290
 - 5.4.2 Bifurkasi Transkritikal pada Model Epidemik --- 293
 - 5.4.3 Bifurkasi Transkritikal pada Model Perikanan dengan Tangkapan --- 295
 - 5.4.4 Bifurkasi Hopf pada Model Mangsa Pemangsa --- 298
 - 5.4.5 Bifurkasi Hopf pada Model Glycolysis --- 302
 - 5.4.6 Bifurkasi Heteroklinik pada Model Mangsa Pemangsa --- 304
- 5.5 Kodimensi Bifurkasi --- 305
 - 5.5.1 Kodimensi Satu: Bifurkasi Sederhana --- 305
 - 5.5.2 Kodimensi Dua: Bifurkasi Lebih Kompleks --- 306

LATIHAN --- 315

DAFTAR PUSTAKA --- 321

DAFTAR PUSTAKA



- [1]. Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1997). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer.
- [2]. Arrowsmith, D. K., & Place, C. M. (1990). *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [3]. Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (2012). *Differential Equations* (4th ed.). Cengage Learning.
- [4]. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (1997). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons.
- [5]. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). Wiley.
- [6]. Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2001). *Mathematical Models in Population Biology And Epidemiology*. Springer.
- [7]. Braun, M. (1993). *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics* (4th ed.). Springer.
- [8]. Camacho, E. F., & Bordons, C. (2007). *Model Predictive Control* (2nd ed.). Springer.
- [9]. Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (2nd ed.). Westview Press.

- [10]. Doedel, E. J., & Oldeman, B. E. (2009). *AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Concordia University.
- [11]. Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. SIAM.
- [12]. Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology* (Classics in Applied Mathematics). SIAM.
- [13]. Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer.
- [14]. Hale, J. K., & Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer.
- [15]. Hall, S. R., Duffy, M. A., & Cáceres, C. E. (2005). Selective predation and productivity jointly drive complex behavior in host-parasite systems. *The American Naturalist*, 165(1), 70–81. <https://doi.org/10.1086/426598>
- [16]. Hastings, A. (2005). *Population Biology: Concepts and Models*. Springer.
- [17]. Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (3rd ed.). Academic Press.
- [18]. Hsu, S. B., & Hwang, T. W. (1999). Hopf bifurcation analysis for a predator-prey system of Holling and Leslie type. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 3, 35–53.
- [19]. Izhikevich, E. M. (2007). *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. MIT Press.
- [20]. Jackson, E. A. (1991). *Perspectives of Nonlinear Dynamics*. Cambridge University Press.
- [21]. Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems* (3rd ed.). Prentice Hall.
- [22]. Kusnanto, A. (2011). Bifurkasi heteroclinic pada mangsa-pemangsa. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, 10(1), 31–38.

- [23]. Kuznetsov, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory* (3rd ed.). Springer.
- [24]. LaSalle, J., & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. Academic Press.
- [25]. Lenbury, Y., Rattanamongkonkul, S., Tumravsinsin, N., & Amornsamakul, S. (1999). Predator-prey interaction coupled by parasitic infection: Limit cycles and chaotic behavior. *Mathematical and Computer Modelling*, 30(9–10), 131–146.
- [26]. Logan, J. D. (2015). *Applied Mathematics* (4th ed.). Wiley.
- [27]. Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*. William and Wilkins.
- [28]. Lutscher, F., & Iljon, T. (2013). Competition, facilitation and the Allee effect. *Oikos*, 122(4), 621–631.
- [29]. Lynch, S. (2001). *Dynamical Systems with Applications Using Maple*. Springer Science+Business Media.
- [30]. Meiss, J. D. (2007). *Differential Dynamical Systems*. SIAM.
- [31]. Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction* (3rd ed.). Springer.
- [32]. Murray, J. D. (2003). *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications* (3rd ed.). Springer.
- [33]. Nicolis, G., & Prigogine, I. (1989). *Exploring Complexity: An Introduction*. Freeman & Co.
- [34]. Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
- [35]. Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3rd ed.). Springer.
- [36]. Perko, L. (2013). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3rd ed.). Springer.
- [37]. Sandefur, J. T. (1993). *Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications*. Oxford University Press.

- [38]. Sani, A. (2022). *Pengantar Pemodelan Matematika dalam Bidang Biologi*. Media Sains Indonesia.
- [39]. Slotine, J.-J. E., & Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- [40]. Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, And Engineering* (2nd ed.). CRC Press.
- [41]. Teschl, G. (2012). *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society.
- [42]. Verhulst, F. (1996). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems* (2nd ed.). Springer.
- [43]. Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (2nd ed.). Springer.